



**Ens : Pr. Gaussienne**  
**Analyse II**  
144 minutes

SCIPER : .....  
Signature : .....

- Aucun document n'est autorisé.
- Calculatrices interdites.
- Pour les questions à choix multiple : +3 points si la réponse est correcte, 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses, -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type vrai-faux : +1 point si la réponse est correcte, 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses, -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions ouvertes : justifier toutes les réponses ; toutes les étapes du raisonnement doivent figurer dans la réponse.



## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondant à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

**Question 1 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = x^2 \sin(y) - y^2 x$ . Alors la dérivée directionnelle de  $f$  en  $(1, 0)$  suivant le vecteur  $v = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)^T$  vaut

- $\frac{8}{5} - \frac{3}{5}$
- $\frac{3}{5}$
- $\frac{8}{5} + \frac{3}{5}$
- $\frac{8}{5}$

**Question 2 :** Soit  $D$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  donné par  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, x \leq |y|\}$ . Alors l'intégrale  $\iint_D x \, dx \, dy$  vaut

- $-\frac{27\sqrt{2}}{4}$
- $-18$
- $0$
- $-\frac{9\sqrt{2}}{2}$

**Question 3 :** La solution  $y(x)$  de l'équation différentielle  $xy'(x) = \frac{(y(x))^2}{\cos(\ln x) + 2}$  sur l'intervalle  $]1, +\infty[$  qui satisfait la condition initiale  $y(e^{\pi/2}) = -1$  vérifie aussi

- $y(e^{\pi}) = -\frac{1}{3}$
- $y(e^{\pi}) = \frac{1}{3}$
- $y(e^{\pi}) = -\frac{2}{5}$
- $y(e^{\pi}) = -\frac{1}{2}$

**Question 4 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = e^{2x-3y+x^2}$ . Alors le polynôme de Taylor d'ordre deux de  $f$  autour du point  $(0, 0)$  est

- $p_2(x, y) = 1 + 2x - 3y + 3x^2 + \frac{9}{2}y^2$
- $p_2(x, y) = 1 + 2x - 3y + 2x^2 - 3xy + \frac{9}{2}y^2$
- $p_2(x, y) = 1 + 2x - 3y + 3x^2 - 6xy + \frac{9}{2}y^2$
- $p_2(x, y) = 1 + 2x - 3y + 2x^2 - 6xy + \frac{9}{2}y^2$

**Question 5 :** Soit  $F : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $F(t) = \int_t^{t^3} \frac{\arctan(tx)}{x} dx$ . Alors, pour tout  $t > 0$ ,

- $F'(t) = 3 \arctan(t^4) - \arctan(t^2)$
- $F'(t) = \frac{3 \arctan(t^4)}{t} - \frac{\arctan(t^2)}{t} + \int_t^{t^3} \frac{1}{x(1+t^2x^2)} dx$
- $F'(t) = \frac{3 \arctan(t^4)}{t} - \frac{\arctan(t^2)}{t}$
- $F'(t) = \frac{3 \arctan(t^4) - \arctan(t^2)}{t} + \int_t^{t^3} \frac{1}{1+t^2x^2} dx$



**Question 6 :** Soit  $I = \int_0^1 \left( \int_{y^{1/2}}^1 10y^4 \cos(x^5) dx \right) dy$ . Alors

- $I = 2 \sin(1)$
- $I = 1 - \cos(1)$
- $I = \sin(1)$
- $I = \frac{1}{2} \sin(1)$

**Question 7 :** Soit  $\bar{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la fonction définie par  $\bar{g}(x, y, z) = (x + y, xz, y^2 - z)^T$  et soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(u, v, w) = u^2v + w$ . Alors la fonction composée  $h = f \circ \bar{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait

- $\frac{\partial h}{\partial y}(1, 0, 1) = 2$
- $\frac{\partial h}{\partial y}(1, 0, 1) = 0$
- $\frac{\partial h}{\partial y}(1, 0, 1) = -1$
- $\frac{\partial h}{\partial y}(1, 0, 1) = 1$

**Question 8 :** Soit  $S$  la surface  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2y + e^z = 5\}$  et soit  $z_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $(2, 1, z_0) \in S$ . Alors l'équation du plan tangent à  $S$  au point  $(2, 1, z_0)$  est

- $4x - 2y - z - 5 = 0$
- $4x + 2y + z - 11 = 0$
- $4x - 2y + z - 7 = 0$
- $2x - 2y + z - 1 = 0$

**Question 9 :** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y, z) = xe^z + y^2x - z^2$ . L'équation  $f(x, y, z) = 2$  définit implicitement une fonction  $z = g(x, y)$  qui satisfait  $g(1, 1) = 0$  et  $f(x, y, g(x, y)) = 2$  dans un voisinage de  $(x, y) = (1, 1)$ . La valeur de  $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$  est alors

- $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = -1$
- $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = -\frac{1}{2}$
- $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = -2$
- $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 2$

**Question 10 :** Le sous-ensemble  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \text{ et } y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$

- est ouvert et borné
- est ouvert et non borné
- est fermé et non borné
- n'est ni ouvert ni fermé, et est non borné

**Question 11 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = e^{2x} - 2xe^y + e^{2y}$ . Alors

- la fonction  $f$  admet un point stationnaire sur  $\mathbb{R}^2$  qui n'est pas un point d'extremum local
- la fonction  $f$  admet un unique point de maximum local sur  $\mathbb{R}^2$
- la fonction  $f$  admet un unique point de minimum local sur  $\mathbb{R}^2$
- la fonction  $f$  n'a pas de points stationnaires sur  $\mathbb{R}^2$



**Question 12 :** Soit  $D$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  donné par  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 3x + y + 2z \leq 6\}$ . Alors le volume de  $D$  est

- $\int_0^2 \left( \int_0^{3-x} \left( \int_0^{6-3x-y} dz \right) dy \right) dx$
- $\int_0^6 \left( \int_0^{6-y} \left( \int_0^{(6-3x-y)/2} dz \right) dx \right) dy$
- $\int_0^2 \left( \int_0^{6-3x} \left( \int_0^{(6-3x-y)/2} dz \right) dy \right) dx$
- $\int_0^3 \left( \int_0^{6-3x} \left( \int_0^{6-3x-y} dz \right) dy \right) dx$

**Question 13 :** Soit  $\{\bar{a}_n\}$  la suite d'éléments de  $\mathbb{R}^3$  définie par  $\bar{a}_n = \left( \frac{\cos(n^2)}{n}, (-1)^n + \frac{1}{n}, n(-1)^n \right)^T$  pour tout  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Alors

- la suite converge
- la suite est bornée
- la suite admet une sous-suite convergente dont la limite est  $(0, 1, +\infty)^T$
- la suite n'admet pas de sous-suite bornée

**Question 14 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$ . Alors

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \frac{1}{2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  n'existe pas

**Question 15 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Alors

- $f$  est dérivable en  $(0, 0)$
- $f$  est continue en  $(0, 0)$ , mais  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  n'existe pas
- $f$  est continue en  $(0, 0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  existent, mais  $f$  n'est pas dérivable en  $(0, 0)$
- $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$

**Question 16 :** La solution  $y(x)$  de l'équation différentielle  $y'(x) + \frac{2x}{1+x^2} y(x) = \frac{x}{1+x^2}$  qui satisfait la condition initiale  $y(0) = 3$  vérifie aussi

- $y(1) = 1$
- $y(1) = \frac{7}{4}$
- $y(1) = \frac{5}{4}$
- $y(1) = \frac{3}{4}$



**Question 17 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = x^2y^2$  et soit  $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3$ . Alors, sous la contrainte  $g(x, y) = 0$ , la valeur maximale de  $f$  est

- 3
- $\frac{9}{4}$
- $\frac{3}{2}$
- $\frac{9}{8}$

**Question 18 :** La solution  $y(x)$  de l'équation différentielle  $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 8x^2$  qui satisfait les conditions initiales  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$  vérifie aussi

- $y(1) = 3e^{-2} + 2$
- $y(1) = 2e^{-2} + 2$
- $y(1) = 4e^{-2} + 2$
- $y(1) = 2 - 2e^{-2}$



## Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou la case FAUX si elle n'est pas toujours vraie (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question 19 :** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ . Alors  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z)$  pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

- FAUX  
 VRAI

**Question 20 :** Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles fermés non vides de  $\mathbb{R}^2$ . Alors  $A \cap B$  est un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^2$ .

- VRAI  
 FAUX

**Question 21 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $f(0,0) = 0$ . Alors  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ .

- FAUX  
 VRAI

**Question 22 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  et soit  $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$  un point stationnaire de  $f$ . Si les deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de la matrice hessienne  $\text{Hess}_f(\bar{a})$  satisfont  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ , alors  $\bar{a}$  est un point selle de  $f$ .

- FAUX  
 VRAI

**Question 23 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^\infty$  et soit  $p_2$  son polynôme de Taylor d'ordre 2 autour de  $(0,0)$ . Si  $p_2$  est le polynôme nul, alors  $\nabla f(0,0) = (0,0)$ .

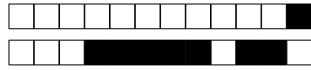
- VRAI  
 FAUX

**Question 24 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $g(x, y) = |f(x, y)|$ . Si  $f$  n'est pas continue en  $(0,0)$ , alors  $g$  n'est pas continue en  $(0,0)$ .

- FAUX  
 VRAI

**Question 25 :** Soit  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ . Alors la frontière  $\partial A$  est l'ensemble  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ .

- VRAI  
 FAUX



**Question 26 :** Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$ , alors  $f$  est dérivable en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

- FAUX  
 VRAI

**Question 27 :** Soient  $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  et  $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ . Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et non négative, alors  $\iint_{D_1} f(x, y) dx dy \geq \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$ .

- FAUX  
 VRAI

**Question 28 :** Soit  $D$  un sous-ensemble non vide, fermé et borné de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, alors  $f$  atteint son maximum global sur  $D$ .

- FAUX  
 VRAI



### Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé. Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 29 :** *Cette question est notée sur 8 points.*

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<i>Réservé au correcteur</i>
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	------------------------------

Soit  $U \subset \mathbb{R}^2$  un sous-ensemble ouvert et soit  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ .

- (a) Soit  $(x_0, y_0) \in U$  tel que  $F(x_0, y_0) = 0$  et  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ . Énoncer (sans démonstration) le théorème de la fonction implicite appliqué à  $F$  en  $(x_0, y_0)$ .
- (b) Soient maintenant  $f, F : U \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $C^1$ . On suppose que  $f$  admet un extremum local en  $(x_0, y_0) \in U$  sous la contrainte  $F(x, y) = 0$ , avec  $\nabla F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ . En utilisant le théorème de la fonction implicite, montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla F(x_0, y_0)$ .







**Question 30 :** *Cette question est notée sur 4 points.*

<sub>0</sub> <sub>1</sub> <sub>2</sub> <sub>3</sub> <sub>4</sub>

*Réservé au correcteur*

Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .





**Question 31 :** *Cette question est notée sur 5 points.*

<sub>0</sub> <sub>1</sub> <sub>2</sub> <sub>3</sub> <sub>4</sub> <sub>5</sub>

*Réservé au correcteur*

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On considère les propositions :  $P$  : le nombre  $n$  est impair ;  $Q$  : le nombre  $n^2 - 1$  est divisible par 8.

- (a) Écrire la proposition  $P \Rightarrow Q$  et sa contraposée.
- (b) Démontrer  $P \Rightarrow Q$  par une méthode directe.

